

Varianta 50

Subiectul I

- a) $AB = 5$.
- b) $S_{ABC} = 15$.
- c) $E = 1$.
- d) $5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow$ triunghiul este dreptunghic.
- e) $i^3 + i^5 = 0$.
- f) $P = 4$.

Subiectul II

1.

- a) $\log_2 16 = 4$.
- b) $p = \frac{3}{4}$.
- c) $A_5^2 = 20$.
- d) $x = 2$.
- e) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2x + 3$.

2.

- a) $f'(x) = e^x - 1, \forall x \in \mathbf{R}$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = e^3 - 1$.
- c) $A(0,1)$ este punctul de extrem local al graficului.
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
- e) $\int_0^1 f(x) dx = e - \frac{3}{2}$.

Subiectul III

- a) $\det A = 0$.
- b) $A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 15 & 15 \end{pmatrix}; 5A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 15 & 15 \end{pmatrix}$, deci $A^2 = 5A$.
- c) Fie $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}$, iar $B \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$, deci $A \cdot B \neq B \cdot A$.
- d) Fie $C = I_2$. Atunci $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A$, $A \neq I_2$.
- e) Fie $P(n)$ propoziția $A^n = 5^{n-1} \cdot A$.
Pentru $n = 1$ propoziția este adevărată.

Presupunem adevărată propoziția pentru $n = k$: $A^k = 5^{k-1} \cdot A$. Vom demonstra că propoziția este adevărată și pentru $n = k + 1$, adică $A^{k+1} = 5^k \cdot A$.

$A^{k+1} = A^k \cdot A = 5^{k-1} \cdot A^2 = 5^{k-1} \cdot 5A = 5^k \cdot A$. Folosind metoda inducției matematice rezultă că $A^n = 5^{n-1} \cdot A, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad A + A^2 + A^3 + \dots + A^{100} &= A + 5A + 5^2 A + \dots + 5^{99} A = (1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{99})A = \\ &= \frac{5^{100} - 1}{4} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(5^{100} - 1) & \frac{1}{2}(5^{100} - 1) \\ \frac{3}{4}(5^{100} - 1) & \frac{3}{4}(5^{100} - 1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{g)} \quad A^{101} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5^{100} & 2 \cdot 5^{100} \\ 3 \cdot 5^{100} & 3 \cdot 5^{100} \end{pmatrix}. \text{ Cum } \frac{1}{2}(5^{100} - 1) - 2 \cdot 5^{100} < 0 \text{ și } \frac{3}{4}(5^{100} - 1) - 3 \cdot 5^{100} < 0,$$

rezultă că toate elementele matricei $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{100} - A^{101}$ sunt strict negative.

Subiectul IV

$$\text{a)} \quad f(x) = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}, \forall x > 0.$$

$$\text{b)} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}, \forall x \in (0, \infty).$$

$$\text{c)} \quad f'(x) = \frac{-(2x+1)}{x^2(x+1)^2} < 0, \forall x > 0 \Rightarrow f \text{ este descrescătoare pe } (0, \infty).$$

$$\text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = 0, \text{ deci } y = 0 \text{ este asimptotă spre } +\infty.$$

$$\text{e)} \quad \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = (\ln x - \ln(x+1)) \Big|_1^2 = \ln 4 - \ln 3 = \ln \frac{4}{3}.$$

$$\text{f)} \quad f(1) = 1 - \frac{1}{2}; f(2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \dots; f(n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \text{ atunci}$$

$$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

$$\text{g)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n+1} \right)^{\frac{n+1}{-1} \cdot \frac{-2n}{n+1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{n+1}} = \frac{1}{e^2}.$$